Title	Lévyリスク過程に対するポアソン的配当と資本注入の最適戦略について (確率論シンポジウム)
Author(s)	野場, 啓; Pérez, José-Luis; 山崎, 和俊; 矢野, 孝次
Citation	数理解析研究所講究録 = RIMS Kokyuroku (2019), 2116: 29-32
Issue Date	2019-07
URL	http://hdl.handle.net/2433/252089
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 第2116巻 2019年 29-32

Lévy リスク過程に対するポアソン的配当と資本注入の最適戦略について

Kei Noba (Graduate School of Science, Kyoto University)
José-Luis Pérez (Centro de Investigación en Matemáticas)
Kazutoshi Yamazaki (Faculty of Engineering Science, Kansai University)
Kouji Yano (Graduate School of Science, Kyoto University)

1 序

負スペクトルの Lévy 過程を用いたモデルに関する *de Finetti* **最適配当問題**には多くの先行研究がある. Loeffen [3] は反射戦略の最適性を証明し, Kyprianou et al. [2] は屈折戦略の最適性を証明した. 資本注入を導入したモデルについては, Avram et al. [1] は反射-反射戦略の最適性を, Pérez et al. [8] は屈折-反射戦略の最適性を証明した.

近年, de Finetti 最適配当問題は *Poisson* **的配当**の場合に拡張された. 正スペクトルの Lévy 過程を用いたモデルに関する最適 Poisson 的配当戦略は Pérez–Yamazaki [6] によって研究された. また負スペクトルの Lévy 過程を用いたモデルに対しては, [4] で *Poisson* **的反射戦略**の最適性が示された. さらに [5] で我々は, 負スペクトルの Lévy 過程を用いた資本注入を行うモデルに対し, ある *Poisson* **的反射-古典的反射戦略**が最適戦略であることを示した.

本報告では, [5] の主結果について報告する.

2 準備

2.1 負スペクトルの Lévy 過程とスケール関数

$X = (X(t); t \geq 0)$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上に定義された, 保険会社のサープラスを表す確率過程とする. すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し, $\mathbb{P}_x$ は x を出発する X の法則とする. また, $\mathbb{E}_x$ は $\mathbb{P}_x$ での期待値を表すものとする.

本報告では X は負スペクトルの Lévy 過程, つまり正のジャンプを持たず, 単調な標本路は持たない Lévy 過程とする. X の Laplace 指数を,

$$\mathbb{E}_0\left[e^{\theta X(t)}\right] =: e^{\psi(\theta)t}, \quad t, \theta \geq 0, \tag{2.1}$$

とする. このとき ψ は

$$\psi(\theta) := \gamma\theta + \frac{\eta^2}{2}\theta^2 + \int_{(-\infty,0)} \left(e^{\theta z} - 1 - \theta z \mathbf{1}_{\{z>-1\}}\right)\Pi(dz), \quad \theta \geq 0 \tag{2.2}$$

で与えられる．ここで, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\eta \geq 0$, また Π は以下の式を満たす $(-\infty, 0)$ 上の Lévy 測度である:

$$\int_{(-\infty,0)} (1 \wedge z^2)\Pi(dz) < \infty. \tag{2.3}$$

本報告を通して X は,

$$\mathbb{E}_0[X(1)] = \psi'(0+) > -\infty \tag{2.4}$$

を満たすものとする．

$q \geq 0$ に対し, 関数 $W^{(q)} : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を負スペクトルの Lévy 過程 X の**スケール関数**とする．つまり, $W^{(q)}$ は $(-\infty, 0)$ 上では 0 であり, $[0, \infty)$ 上では連続かつ狭義単調増加で以下の Laplace 変換によって定まるものとする:

$$\int_0^\infty e^{-\theta x} W^{(q)}(x)dx = \frac{1}{\psi(\theta) - q}, \quad \theta > \Phi(q). \tag{2.5}$$

ただし,

$$\Phi(q) := \sup\{\lambda \geq 0 : \psi(\lambda) = q\} \tag{2.6}$$

である．また, $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$Z^{(q)}(x) := 1 + q\int_0^x W^{(q)}(y)dy \tag{2.7}$$

とし, $q, r > 0$ および $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$Z^{(q)}(x, \Phi(q+r)) := e^{\Phi(q+r)x}\left(1 - r\int_0^x e^{-\Phi(q+r)z}W^{(q)}(z)dz\right) \tag{2.8}$$

$$= r\int_0^\infty e^{-\Phi(q+r)z}W^{(q)}(z+x)dz > 0 \tag{2.9}$$

とする．

2.2 Poisson 的配当と資本注入の最適戦略

配当と資本注入の戦略は, 二つの $[0, \infty)$-値確率過程のペア $\pi := (L^\pi(t), R^\pi(t); t \geq 0)$ で与えられる．L_t^π は時間 t までの配当金の合計額を表し, R_t^π は時間 t までの資本注入の合計額を表す．

配当に関しては, X と独立な強度 $r > 0$ の Poisson 過程 $N^r = (N^r(t); t \geq 0)$ のジャンプ時刻 $\mathcal{T}_r := (T(i); i \geq 1)$ でのみ配当金を支払うことができるものとする．ここで, $T(i) - T(i-1)$, $i \geq 1$ (ただし $T(0) := 0$) は独立な平均 $1/r$ の指数分布である．より詳し

くいうと, 確率過程 (X, N^r) によって生成されるフィルトレーション $\mathbb{F}^N := (\mathcal{F}^N(t); t \geq 0)$ に適合で càglàd な確率過程 ν^π が存在して, L^π は

$$L^\pi(t) = \int_{[0,t]} \nu^\pi(s) dN^r(s), \qquad t \geq 0, \tag{2.10}$$

と書くことができるとする.

一方で資本注入に関しては, R^π は非減少, 右連続, $\mathbb{F}^N$-適合で $R^\pi(0-) = 0$ を満たす確率過程とする. L^π と違い R^π は時間に対して連続的に増加することができる.

このときサープラスを表す確率過程は

$$U^\pi(t) := X(t) - L^\pi(t) + R^\pi(t), \quad t \geq 0, \tag{2.11}$$

で与えられる. (L^π, R^π) は, $t \geq 0$ に対して $U^\pi(t) \geq 0$ を満たすように与えられるとする.

上記の条件に加え,

$$\mathbb{E}_x\left[\int_{[0,\infty)} e^{-qt} dR^\pi(t)\right] < \infty \tag{2.12}$$

を満たす戦略 π の集合を $\mathcal{A}$ とする. $\beta > 1$ を資本注入のコストとし, $q > 0$ を時間に対する割引率とする. このとき, 関数

$$v_\pi(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_{[0,\infty)} e^{-qt} dL^\pi(t) - \beta \int_{[0,\infty)} e^{-qt} dR^\pi(t)\right], \qquad x \geq 0, \tag{2.13}$$

を $\pi \in \mathcal{A}$ において最大化することが本研究の目的である. つまり, 値関数

$$v(x) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}} v_\pi(x), \qquad x \geq 0, \tag{2.14}$$

を計算し, $v = v_{\pi^*}$ を満たす最適戦略 π^* を求めたい.

3 主結果

$b \geq 0$ での Poisson 的反射-古典的反射戦略 $\bar{\pi}^{0,b}$ を以下のように定義する:

$t \geq 0$ に対し, $R(t) := (-\inf_{0 \leq s \leq t} X(s)) \vee 0$ とし,

$$U^{\bar{\pi}^{0,b}}(t) = X(t) + R(t), \quad 0 \leq t < \widehat{T}_b^+(1) \tag{3.1}$$

とする. ただし, $\widehat{T}_b^+(1) := \inf\{T(i) : \; X(T(i)) + R(T(i)) > b\}$ である. 時間 $\widehat{T}_b^+(1)$ で $U^{\bar{\pi}^{0,b}}$ は $X(\widehat{T}_b^+(1)) + R(\widehat{T}_b^+(1)) - b$ のジャンプをする。つまり, $U^{\bar{\pi}^{0,b}}(\widehat{T}_b^+(1)) = b$ である. 次に, $\widehat{T}_b^+(1) \leq t < \widehat{T}_b^+(2) := \inf\{T(i) > \widehat{T}_b^+(1) : \; U^{\bar{\pi}^{0,b}}(T(i)-) > b\}$ に対し, $U^{\bar{\pi}^{0,b}}(t)$ は確率過程 $(X(t) - X(\widehat{T}_b^+(1)) + b; t \geq \widehat{T}_b^+(1))$ の 0 での反射過程の挙動をするものとする. 以後同様に

して, 帰納的に $U^{\overline{\pi}^{0,b}}$ を構成する. このとき, 同時にはジャンプしえない二つの単調増加で càdlàg な過程 $L^{\overline{\pi}^{0,b}}$ と $R^{\overline{\pi}^{0,b}}$ を用いて

$$U^{\overline{\pi}^{0,b}}(t) = X(t) - L^{\overline{\pi}^{0,b}}(t) + R^{\overline{\pi}^{0,b}}(t), \quad t \geq 0, \tag{3.2}$$

と書けることは明らかである. $\overline{\pi}^{0,b} = (L^{\overline{\pi}^{0,b}}, R^{\overline{\pi}^{0,b}})$ とする.

期待正味現在価値 $v_{\overline{\pi}^{0,b}}$ は [7, Corollary 10, 11] によって計算されている.

$b \geq 0$ に対し,

$$g(b) := \left(1 - \frac{rW^{(q)}(b)}{\Phi(q+r)Z^{(q)}(b, \Phi(q+r))}\right)\left(\beta Z^{(q)}(b) - 1\right) - \frac{\beta q}{\Phi(q+r)}W^{(q)}(b), \tag{3.3}$$

とし,

$$b^* := \inf\{b \geq 0 : g(b) \leq 0\} \tag{3.4}$$

とする. このとき b^* は有限である ([5, Remark 4.1]).

次の定理が本研究の主結果である.

Theorem 3.1 ([5, Theorem 5.1])**.** 戦略 $\overline{\pi}^{0,b^*}$ は最適戦略である.

References

[1] F. Avram, Z. Palmowski and M. R. Pistorius. On the optimal dividend problem for a spectrally negative Lévy process. Ann. Appl. Probab. 17 (2007), no. 1, 156–180.

[2] A. E. Kyprianou, R. L. Loeffen and J. L. Pérez. Optimal control with absolutely continuous strategies for spectrally negative Lévy processes. J. Appl. Probab. 49 (2012), no. 1, 150-166.

[3] R. L. Loeffen. On optimality of the barrier strategy in de Finetti's dividend problem for spectrally negative Lévy processes. Ann. Appl. Probab. 18 (2008), no. 5, 1669-1680.

[4] K. Noba, J. L. Pérez, K. Yamazaki and K. Yano. On optimal periodic dividend strategies for Lévy risk processes. Insurance Math. Econom. 80 (2018), 29–44.

[5] K. Noba, J. L. Pérez, K. Yamazaki and K. Yano. On optimal periodic dividend and capital injection strategies for spectrally negative Lévy models J. Appl. Probab. 55 (2018), no. 4, 1272–1286.

[6] J. L. Pérez and K. Yamazaki. On the optimality of periodic barrier strategies for a spectrally positive Lévy process. Insurance Math. Econom. 77 (2017), 1–13.

[7] J. L. Pérez and K. Yamazaki. Mixed Periodic-classical barrier strategies for Lévy risk processes. Risks. 6(2) (2018), 33.

[8] J. L. Pérez, K. Yamazaki and X. Yu. On the bail-out optimal dividend problem. J. Optim. Theory Appl. 179 (2018), no. 2, 553–568.